



Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

Методические указания

В.В. Дубинин, Ю.Н. Жигулевцев, С.Л. Косачев

**АВТОМАТИЗИРОВАННЫЙ
ЛАБОРАТОРНЫЙ КОМПЛЕКС
«ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ
МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ
С ИНЕРЦИОННЫМ ВОЗМУЩЕНИЕМ»
ТМЛ-35**

Издательство МГТУ имени Н.Э. Баумана

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Н.Э. БАУМАНА

В.В. Дубинин, Ю.Н. Жигулевцев, С.Л. Косачев

АВТОМАТИЗИРОВАННЫЙ
ЛАБОРАТОРНЫЙ КОМПЛЕКС
«ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ
МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ
С ИНЕРЦИОННЫМ ВОЗМУЩЕНИЕМ»
ТМЛ-35

*Методические указания к выполнению курсовой работы
по курсу «Теоретическая механика»*

Москва

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана

2004

УДК 521.3
ББК 22.213
Д79

Рецензент А.В. Конаев

Д79 Дубинин В.В., Жигулевцев Ю.Н., Косачев С.Л.
Автоматизированный лабораторный комплекс «Вынужденные колебания механической системы с инерционным возмущением» ТЛМ-35: Методические указания. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. — 16 с.: ил.
ISBN 5-7038-2571-7

Описан лабораторный комплекс, предназначенный для исследования с применением ПЭВМ вынужденных колебаний механической системы с инерционным возмущением. Проведены теоретический анализ и экспериментальное исследование работы лабораторной установки, дано описание методики и порядка выполнения лабораторной работы. Для студентов второго курса всех специальностей МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Ил. 7.

УДК 521.3
ББК 22.213

Владимир Валентинович Дубинин
Юрий Николаевич Жигулевцев
Сергей Леонидович Косачев

АВТОМАТИЗИРОВАННЫЙ ЛАБОРАТОРНЫЙ КОМПЛЕКС «ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ИНЕРЦИОННЫМ ВОЗМУЩЕНИЕМ» ТЛМ-35

Методические указания

Редактор Е.К. Кошелева
Компьютерная верстка С.А. Серебряковой

Подписано в печать 24.09.04. Формат 60×84/16. Бумага офсетная.
Печ. л. 1,00. Усл. печ. л. 0,93. Уч.-изд. л. 0,79. Тираж 100 экз.
Заказ 190

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана.
105005, Москва, 2-я Бауманская ул., 5.

5-7038-2571-7

© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004

Лабораторный комплекс «Вынужденные колебания механической системы с инерционным возмущением» предназначен для демонстрации вынужденных колебаний системы и исследования их характеристик. С помощью комплекса ТЛМ-35 можно получить амплитудно-частотную (АЧХ) и фазочастотную (ФЧХ) характеристики вынужденных колебаний, а также наблюдать и анализировать особенности движения механических систем с одной степенью свободы.

1. ОПИСАНИЕ КОМПЛЕКСА

Комплекс состоит из лабораторного стенда (рис. 1) и персональной ЭВМ, связанных между собой интерфейсным кабелем.



Рис. 1

Стенд включает в себя электромеханическую установку и блок управления, соединенные между собой кабелем. ПЭВМ оснащена интерфейсной платой для аналого-цифрового преобразования и ввода сигналов, поступающих с датчиков стенда, а также программным обеспечением.

Электромеханическая установка представляет собой систему, состоящую из тележки, горизонтально перемещающейся на неподвижном основании по направляющим (рельсам), и закрепленного на тележке маятника, вращающегося вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной направлению движения тележки.

Установка приводится в движение электродвигателем, закрепленным на тележке. Вращение вала электродвигателя через муфту и червячный редуктор передается кривошипному механизму с регулируемым эксцентриситетом. Кривошип через тягу соединен с рычагом, качающимся на горизонтальной оси. На этой же оси закреплен маятник. Таким образом, маятник совершает вынужденные колебания по закону, близкому к синусоидальному. Это обеспечивает передачу возмущающего воздействия, формируемого кривошипно-рычажным механизмом, тележке. Угловые отклонения маятника могут быть измерены с помощью потенциометрического датчика. Для измерения перемещений тележки используется фотозлектрический датчик.

Установка может быть применена для проведения лабораторных работ в различных вариантах. В настоящем пособии представлена лабораторная работа, которая проводится при полном оснащении установки: тележка соединена с неподвижным основанием двумя пружинами, а маятнику сообщается от электродвигателя принудительное колебательное движение. В этом случае изучают установившееся колебательное движение тележки.

Лабораторная работа проводится по принципу сравнения экспериментальных и теоретических данных. Для вынужденных колебаний тележки, вызванных возмущением инерционного типа, при изменении частоты вынужденных колебаний строят теоретические кривые АЧХ и ФЧХ. Экспериментальные данные отображаются на экране дисплея в виде совокупностей точек, соответствующих оценкам параметров (частоты, амплитуды и фазы) для каждого периода вынужденных колебаний при изменении частоты возмущения в некотором диапазоне значений. Амплитуду и фазу

колебаний вычисляют на основе анализа сигналов, снимаемых с датчиков угла отклонения маятника и линейного перемещения тележки, т. е. сигналов возмущения и вынужденных колебаний. Запись сигналов и их обработку, расчет параметров вынужденных колебаний тележки проводят с помощью ПЭВМ. Результаты измерений пар параметров «частота — амплитуда», «частота — фаза» отображаются на экране дисплея в виде точек, и при постепенном изменении частоты возмущения сливаются в размытые линии, которые отображают реальные АЧХ и ФЧХ соответственно.

2. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Рассмотрим линеаризованную математическую модель движения тележки. Схема установки представлена на рис. 2.

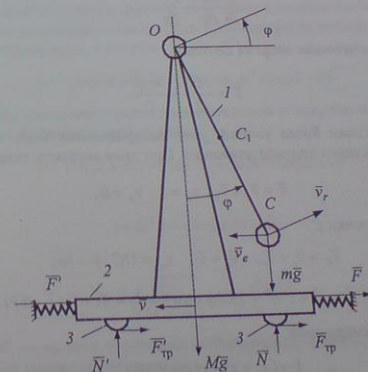


Рис. 2

Маятник 1 приводится в колебательное движение с помощью двигателя, установленного на тележке 2. Масса тележки M . Масса маятника m сосредоточена в точке C . Длина маятника $OC = l$. Маятник совершает плоское движение, но в силу малости их массы леса 3 совершают движение в общей массе тележки M при ее поступательном движении (вращение колес не учитывается).

Система имеет две степени свободы. Вводятся две обобщенные координаты: x — линейное перемещение тележки и φ — угловое отклонение маятника. Изменение координаты φ задано, а закон движения $x = x(t)$ необходимо определить.

Примем, что колеса катятся без скольжения, поэтому работа на возможном перемещении сил $\vec{N}, \vec{N}', \vec{F}_{тр}, \vec{F}'_{тр}$ равна нулю.

Для составления дифференциального уравнения движения тележки используем уравнение Лагранжа II рода:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x,$$

где кинетическая энергия системы

$$T = \frac{M\dot{x}^2}{2} + \frac{m v_C^2}{2}.$$

Возможен более точный учет распределения масс маятника, совершающего плоское движение. При этом скорость тележки

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y, \quad v_x = \dot{x}, \quad v_y = 0,$$

скорость точки C

$$\vec{v}_C = \vec{v}_x + \vec{v}_y, \quad \vec{v}_y = \vec{v}, \quad v_x = OC \cdot \dot{\varphi} = l\dot{\varphi};$$

$$v_C^2 = (\vec{v}_x + \vec{v}_y)^2 = \dot{x}^2 + l^2 \dot{\varphi}^2 + 2\dot{x}l\dot{\varphi} \cos(\pi - \varphi) = \dot{x}^2 + l^2 \dot{\varphi}^2 - 2\dot{x}l\dot{\varphi} \cos \varphi.$$

Обобщенная сила

$$Q_x = \frac{[-c(x_0 + x) - c(x - x_0)]\delta x}{\delta x} = -2cx,$$

где x_0 — начальная деформация пружин; c — жесткость пружин.

6

Запишем уравнение для кинетической энергии:

$$T = \frac{(M+m)\dot{x}^2}{2} - ml\dot{\varphi} \cos \varphi + \frac{ml^2 \dot{\varphi}^2}{2}.$$

Тогда уравнение Лагранжа II рода примет вид

$$(M+m)\ddot{x} - ml(\dot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) = -2cx$$

или

$$(M+m)\ddot{x} + 2cx = ml(\dot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi).$$

При малом значении φ правую часть уравнения можем записать в виде

$$\approx ml(\dot{\varphi} - \dot{\varphi}^2 \varphi).$$

Угол φ задается принудительно в виде $\varphi = \varphi_0 \sin(\omega t + \delta)$, где φ_0, ω — соответственно амплитуда и частота кинематического параметра возмущения φ . Амплитуда φ_0 фиксируется датчиком.

Дифференцируя, получим

$$\dot{\varphi} = \varphi_0 \omega \cos(\omega t + \delta), \quad \dot{\varphi}^2 = \varphi_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \delta).$$

В силу сделанного ранее предположения о том, что φ — малая величина, уравнение примет вид

$$(M+m)\ddot{x} + 2cx = ml\dot{\varphi} = -ml\varphi_0 \omega^2 \sin(\omega t + \delta)$$

или

$$\ddot{x} + K^2 x = -h \sin(\omega t + \delta),$$

где

$$K = \sqrt{\frac{2c}{M+m}}, \quad h = \frac{ml\varphi_0 \omega^2}{M+m}.$$

Здесь K — частота свободных (собственных) колебаний всей системы без учета сопротивления.

Нас интересуют лишь вынужденные колебания тележки. Решение будем искать в виде

7

$$x_s = a_s \sin(\omega t + \delta), \quad -a_s \omega^2 + a_s K^2 = -h, \quad a_s = \frac{h}{\omega^2 - K^2}.$$

Окончательно получим

$$x_s = \frac{h}{\omega^2 - K^2} \sin(\omega t + \delta).$$

Амплитудное значение

$$a_s = \frac{ml\varphi_0 \omega^2}{(M+m)(\omega^2 - K^2)} = \frac{ml\varphi_0 Z^2}{(M+m)(Z^2 - 1)},$$

где $Z = \omega/K$ — коэффициент расстройки (ω — круговая частота вынужденных колебаний).

Если не учитывать сопротивление, то разность фаз ε составит $0, \pi/2, \pi$ в зависимости от соотношения ω и K .

Параметры установки (c — жесткость пружин; M, m — массы тележки и точки C ; l — длина маятника; φ_0 — максимальное значение угла отклонения маятника от вертикали) — задаются. Кроме того, для проведения эксперимента необходимо определить

$$K = \sqrt{\frac{2c}{M+m}}.$$

При проведении эксперимента устанавливают (задают) частоту возмущающего воздействия ω и фиксируют величину x_m — максимальное смещение тележки.

Введем величину $\lambda = \frac{a_s}{l\varphi_0}$, тогда получим

$$\lambda = \frac{a_s}{l\varphi_0} = \frac{m}{M+m} \frac{Z^2}{Z^2 - 1}.$$

Теоретическую кривую $\lambda = \lambda(Z)$ (рис. 3) будем строить по последней формуле. Экспериментальные точки, при которых фиксируются значения x_m и ω , нанесем на график и сравним с теоретической кривой. Для этого необходимо сначала получить значения

$$Z_1 = \frac{\omega_1}{K} \quad \text{и} \quad \lambda_1 = \frac{x_{m1}}{l\varphi_0}.$$

8

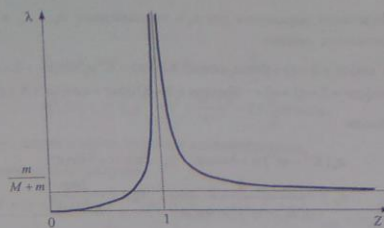


Рис. 3

Замечание 1. Можно учесть сопротивление при колебаниях тележки с маятником.

Обобщенную силу в этом случае запишем в виде

$$Q_x = -2cx - \mu \dot{x},$$

где μ — коэффициент вязкого сопротивления.

Уравнение движения тележки:

$$(M+m)\ddot{x} + \mu \dot{x} + 2cx = -ml\varphi_0 \omega^2 \sin(\omega t + \delta)$$

или

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + K^2 x = -h \sin(\omega t + \delta),$$

где

$$K = \sqrt{\frac{2c}{M+m}}, \quad 2n = \frac{\mu}{M+m}, \quad h = \frac{ml\varphi_0 \omega^2}{M+m}.$$

Решение будем искать лишь для вынужденных колебаний тележки в виде

$$x_s = a_s \sin(\omega t + \delta - \varepsilon).$$

Дифференцируя, получим

$$\dot{x}_s = a_s \omega \cos(\omega t + \delta - \varepsilon), \quad \ddot{x}_s = -a_s \omega^2 \sin(\omega t + \delta - \varepsilon).$$

9

Подставив выражения для x_0 и производных \dot{x}_0 , \ddot{x}_0 в уравнение движения, найдем

$$-a_0 \omega^2 \sin(\omega t + \delta - \varepsilon) + 2n\omega a_0 \cos(\omega t + \delta - \varepsilon) + K^2 a_0 \sin(\omega t + \delta - \varepsilon) = -h \sin[(\omega t + \delta - \varepsilon) + \varepsilon] = -h[\sin(\omega t + \delta - \varepsilon) \cos \varepsilon + \cos(\omega t + \delta - \varepsilon) \sin \varepsilon].$$

Отсюда

$$a_0(K^2 - \omega^2) = -h \cos \varepsilon, \quad a_0 \cdot 2n\omega = -h \sin \varepsilon;$$

$$a_0 = \frac{h}{\sqrt{(K^2 - \omega^2)^2 + 4n^2 \omega^2}}, \quad \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{2n\omega}{K^2 - \omega^2}.$$

Здесь ε — разность фаз, $\varepsilon = \psi_0 - \psi_{\text{вн}}$ (ψ_0 , $\psi_{\text{вн}}$ — соответственно фаза возмущения и фаза вынужденных колебаний тележки).

Далее имеем

$$a_0 = \frac{m l \varphi_0 \omega^2}{(M+m)\sqrt{(K^2 - \omega^2)^2 + 4n^2 \omega^2}}$$

или, используя обозначение $\lambda = \frac{a_0}{l \varphi_0}$, получим

$$\lambda = \frac{m}{M+m} \cdot \frac{Z^2}{\sqrt{(1-Z^2)^2 + Z^2/Q^2}}, \quad (1)$$

где $Q = \frac{K}{2n}$ — добротность системы.

Для сдвига фаз

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{Z}{Q(1-Z^2)}. \quad (2)$$

Кривые $\lambda = \lambda(Z)$, $\varepsilon = \varepsilon(Z)$ имеют вид, представленный на рис. 4. *Замечание 2.* Учет массы стержня при определении кинетической энергии системы:

$$T = \frac{M\dot{x}^2}{2} + \frac{m v_{C_1}^2}{2} + \frac{J_{C_1} \dot{\varphi}^2}{2} + \frac{m_1 v_{C_1}^2}{2},$$

где

$$\bar{v}_{C_1} = \bar{v}_0 + \bar{v}_1; \quad \bar{v}_0 = \dot{x}; \quad v_{r1} = \frac{l}{2} \dot{\varphi};$$

$$v_{C_1}^2 = (\bar{v}_0 + \bar{v}_1)^2 = \dot{x}^2 + \frac{l^2}{4} \dot{\varphi}^2 - 2\dot{x} \frac{l}{2} \dot{\varphi} \cos \varphi;$$

l_1 и m_1 — длина и масса стержня соответственно.

Окончательно получим

$$T = \frac{(M+m+m_1)\dot{x}^2}{2} - \left(m + \frac{m_1}{2} \frac{l_1}{l}\right) \dot{x} l \dot{\varphi} \cos \varphi + \left(m l^2 + J_{C_1} + m_1 \frac{l_1^2}{4}\right) \frac{\dot{\varphi}^2}{2}.$$

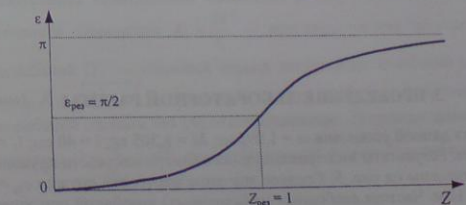
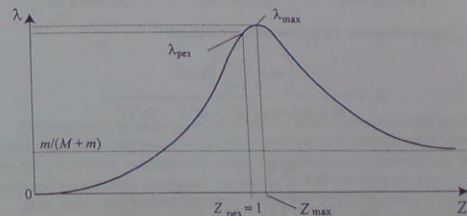


Рис. 4

Тогда уравнение движения тележки примет вид

$$(M+m+m_1)\ddot{x} + \mu\dot{x} + 2cx = \left(m + \frac{m_1}{2} \frac{l_1}{l}\right) l \ddot{\varphi} = -\left(m + \frac{m_1}{2} \frac{l_1}{l}\right) l \varphi_0 \omega^2 \sin(\omega t + \delta)$$

или

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + K^2 x = -h \sin(\omega t + \delta),$$

где

$$K = \sqrt{\frac{2c}{M+m+m_1}}, \quad 2n = \frac{\mu}{M+m+m_1}, \quad h = \frac{\left(m + \frac{m_1}{2} \frac{l_1}{l}\right) l \varphi_0 \omega^2}{M+m+m_1}.$$

Таким образом, с учетом массы стержня

$$a_0 = \frac{\left(m + \frac{m_1}{2} \frac{l_1}{l}\right) l \varphi_0 \omega^2}{(M+m+m_1)\sqrt{(K^2 - \omega^2)^2 + 4n^2 \omega^2}}$$

или

$$\lambda = \frac{a_0}{l \varphi_0} = \frac{m + \frac{m_1}{2} \frac{l_1}{l}}{M+m+m_1} \cdot \frac{Z^2}{\sqrt{(1-Z^2)^2 + Z^2/Q^2}}.$$

3. ПРОВЕДЕНИЕ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

Для данной установки $m = 1,095$ кг; $M = 8,305$ кг; $l = 40$ см; $l_1 = 43$ см. Результаты экспериментального замера жесткости пружин представлены на рис. 5. Среднее значение жесткости пружин $c_{\text{ср}} = 36,5$ Н/м. Частота свободных (собственных) колебаний при этом значении $c_{\text{ср}}$ равна $K \approx 2,8$ рад/с. Значения K , обусловленные разбросом значений жесткости c , лежат в диапазоне $K \approx 2,65 \dots 3$ рад/с.

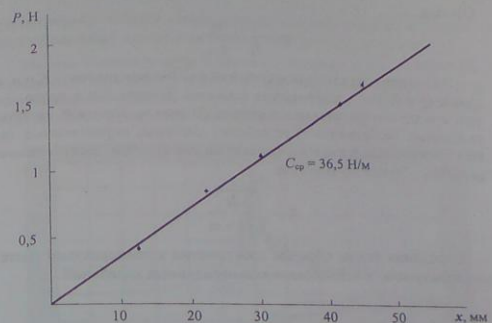


Рис. 5

Определить величину n (или μ) — обобщенный коэффициент сопротивления системы — непосредственным измерением весьма трудно, поэтому определим n проанализировав собственные затухающие колебания системы «тележка — маятник» (рис. 6).

Для этого отклоним систему (тележку с маятником) в крайнее допустимое конструкцией положение и отпустим без начальной скорости. Определим $K_1 = \frac{2\pi}{T_1}$ — круговую частоту затухающих колебаний (T_1 — условный период затухающих колебаний системы), $K = \sqrt{K_1^2 + n^2}$ — круговую частоту свободных (собственных) колебаний системы без учета сопротивления. Декремент колебаний системы $D = \frac{q_i}{q_{i+1}} = e^{nT_1}$, логарифмический декремент колебаний

$$\ln D = \ln \frac{q_i}{q_{i+1}} = nT_1.$$

Отсюда

$$n = \frac{1}{T_1} \ln \frac{q_i}{q_{i+1}}$$

По записи затухающих колебаний рассчитаем значения K и n , а также $Q = K/2n$ — добротность системы. Замеры K и n проводим при выключенном электродвигателе. Значения круговой частоты свободных (собственных) колебаний системы, определенные таким способом, хорошо совпадают со значениями, полученными расчетным путем по формуле

$$K = \sqrt{\frac{2c}{M+m}}$$

Определив таким образом собственные характеристики системы, приступаем к исследованию вынужденных колебаний.

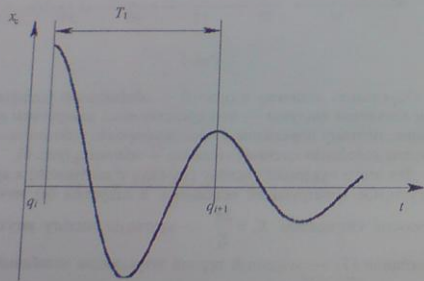


Рис. 6

Включаем электродвигатель и постепенно увеличиваем частоту возмущения маятника ω (а следовательно, и частоту вынужденных колебаний тележки). С помощью датчиков линейных (x) и угловых (φ) отклонений и специальных программ для ЭВМ

регистрируем частоту вынужденных колебаний и соответствующее ей значение максимального отклонения тележки (ω_i, x_m).

На рис. 7 представлены теоретические кривые АЧХ и ФЧХ вынужденных колебаний тележки, рассчитанные по формулам (1) и (2). Экспериментальные значения представлены на рисунке в виде совокупности точек, образующих размытые линии.

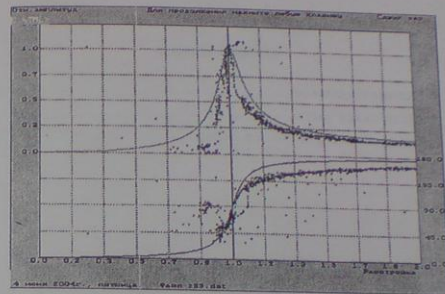


Рис. 7

Видно, что значения фазы во всем диапазоне частот практически совпадают с теоретической кривой, в то время как экспериментальные значения для амплитуды в области резонанса имеют большой разброс, что отражает влияние нелинейных свойств на АЧХ системы. Тем не менее, частота резонанса по АЧХ и ФЧХ хорошо совпадает с теоретической.

Таким образом, результаты эксперимента подтверждают допустимость применения линейной модели для анализа работы данной установки.

